Gegenseitige Lage von Ebenen

Wozu: Untersuchung der Lage zweier Ebenen und Bestimmung deren Schnittgeraden.

Zwei Ebenen E und E* können:
- sich schneiden: E = E* hat unendlich viele Lösungen
- parallel sein: E = E* hat keine Lösung
- identisch sein: E = E* hat genau eine Lösung

Hier geht es natürlich um zwei sich schneidende Ebenen! Diese besitzen eine Gerade, die durch die Unendlich vielen Schnittpunkte geht; die Schnittgerade. Um diese zu ermitteln muss man die Ebenen gleichsetzen und so diese Gerade ermitteln.

Schneiden sich die Ebenen $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ und $E^*:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$?

Schnittgerade bestimmen: E = E*: gleichsetzen und umformen.

ACHTUNG! Immer die beiden Variablen von entweder E ODER E wegsubtrahieren! Also hier r/s oder k/m, sonst bekommt ihr keine Lösung raus!*

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}1+r+3s&=-1+k-2m\\3-2r+s&=5+k+m\\2+4s&=2+2k+3m\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}r+s-k+2m&=-2\\-2r+s-k-m&=2\\4s-2k-3m&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}r+3s-k+2m&=-2\\7s-3k+2m&=-2\\4s-2k-3m&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&r+3s-k+2m=-2\\\Rightarrow\;&7s-3k+3m=-2\\&-2k-33m=8\end{aligned}\qquad\text{Umformen: } k=-4-\frac{33}{2}m$$

k in die Gleichung von E* einsetzen und die Schnittgerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}37\\31\\60\end{pmatrix}$ erhalten.

<u>Aufg. 2</u>

$E:3x_1-4x_2+x_3=1$ und $E^*:5x_1+2x_2-3x_3=6$ => Gleichsetzen und auflösen.

$$\begin{aligned}3x_1-4x_2+x_3&=1\\5x_1+2x_2-3x_3&=6\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}13x_1-5x_3&=13\\5x_1+2x_2-3x_3&=6\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad 13x_1-5x_3=13,$$

für $x_3=13t$ einsetzen, also ist

$$\begin{aligned}x_1&=1+5t\\x_2&=0{,}5+7t\,.\\x_3&=13t\end{aligned}$$

Die gesuchte Schnittgerade ist somit $g:\vec{x}\begin{pmatrix}1\\0.5\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\7\\13\end{pmatrix}$